CENTRALNA
KOMISJA
EGZAMINACYJNA

EGZAMIN MATURALNY

W ROKU SZKOLNYM 2017/2018

MATEMATYKA

POZIOM ROZSZERZONY

FORMUŁA OD 2015

(„NOWA MATURA")

ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ

ARKUSZ MMA-R1

CZERWIEC 2018

Klucz punktowania zadań zamkniętych

Numer zadania	1	2	3	4
Odpowiedź	D	C	A	B

Klucz punktowania zadań kodowanych

Zad 5.

0	9	6

Odpowiedź

0	**9**	**6**

Oblicz współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$, określonej dla każdej liczby rzeczywistej $x\neq 1$, poprowadzonej w punkcie $A=\left(6,\frac{36}{5}\right)$ tego wykresu.
W poniższe kratki wpisz kolejno cyfrę jedności i dwie cyfry po przecinku skończonego rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

Rozwiązanie

$f'(x)=\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$, dla $x\neq 1$. Zatem $f'(6)=0{,}96$.

Zadanie 6. (0–3)

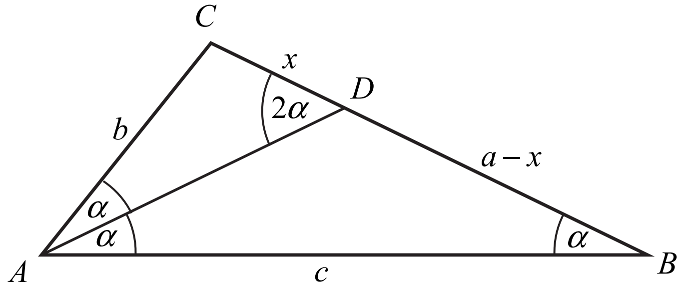
W trójkącie *ABC* kąt *BAC* jest dwa razy większy od kąta *ABC*. Wykaż, że prawdziwa jest równość $|BC|^2-|AC|^2=|AB|\cdot|AC|$.

Rozwiązanie I sposób

Oznaczmy $|\sphericalangle ABC|=\alpha$, $|BC|=a$, $|AC|=b$, $|AB|=c$. Przy tych oznaczeniach teza ma postać

$$a^2-b^2=bc\,.$$

Wtedy $|\sphericalangle BAC|=2\alpha$. Poprowadźmy dwusieczną *AD* kąta *BAC* i niech $|CD|=x$, jak na rysunku.



Ponieważ kąty *ABD* i *BAD* są równe, więc trójkąt *ABD* jest równoramienny. Zatem

$$|AD| = |BD| = a - x \text{ oraz } |\sphericalangle ADB| = 180^\circ - 2\alpha .$$

Stąd wynika, że $|\sphericalangle ADC| = 2\alpha$. Zatem kąty trójkąta ABC są równe odpowiednim kątom trójkąta DAC, co oznacza, że te trójkąty są podobne. Prawdziwe są więc proporcje

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|CD|}{|AC|} \text{ oraz } \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|AD|},$$

czyli

$$\frac{b}{a} = \frac{x}{b} \text{ oraz } \frac{b}{c} = \frac{x}{a-x}.$$

Stąd

$$b^2 = ax \text{ oraz } ab - bx = cx .$$

Z drugiej równości otrzymujemy

$$bx + cx = ab ,$$
$$x(b+c) = ab ,$$
$$x = \frac{ab}{b+c} .$$

Zatem równość $b^2 = ax$ możemy zapisać w postaci

$$b^2 = a \cdot \frac{ab}{b+c} ,$$
$$b = \frac{a^2}{b+c} ,$$
$$b(b+c) = a^2 ,$$
$$b^2 + bc = a^2 ,$$
$$a^2 - b^2 = bc .$$

To kończy dowód.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 p.

Zdający, przy przyjętych oznaczeniach, zapisze jedną z równości: $\frac{b}{a} = \frac{x}{b}$, $\frac{b}{c} = \frac{x}{a-x}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 p.

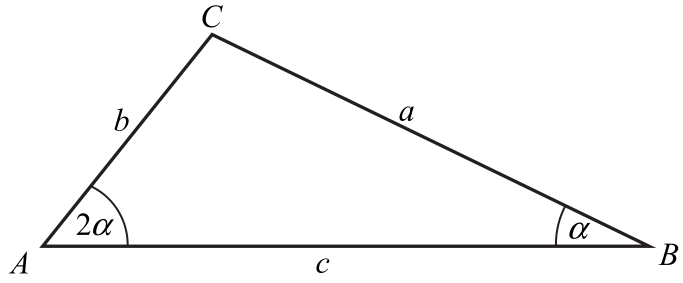
Zdający zapisze zależność, w której występują tylko wielkości a, b i c, ale nie wykaże tezy, np. zapisze $b^2 = a \cdot \frac{ab}{b+c}$.

Rozwiązanie pełne .... 3 p.

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

Rozwiązanie II sposób

Oznaczmy $|\sphericalangle ABC| = \alpha$, $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$.



Wtedy $|\sphericalangle BAC| = 2\alpha$. Przy tych oznaczeniach teza ma postać

$$a^2 - b^2 = bc .$$

Z twierdzenia sinusów otrzymujemy

$$\frac{|AC|}{\sin\alpha} = \frac{|BC|}{\sin 2\alpha}, \text{ czyli } \frac{b}{\sin\alpha} = \frac{a}{2\sin\alpha\cos\alpha} .$$

Stąd

$$a = 2b\cos\alpha .$$

Z twierdzenia cosinusów wynika natomiast

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\alpha ,$$

więc

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\frac{a}{2b},$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - \frac{a^2c}{b},$$

$$b^3 = a^2b + bc^2 - a^2c,$$

$$b^3 - bc^2 + a^2c - a^2b = 0,$$

$$b\left(b^2 - c^2\right) - a^2\left(b - c\right) = 0,$$

$$\left(b-c\right)\left(b\left(b+c\right) - a^2\right) = 0,$$

$$\left(b-c\right)\left(b^2 + bc - a^2\right) = 0 .$$

Stąd wynika, że $b = c$ lub $a^2 - b^2 = bc$. Zauważmy, że gdy $b = c$, to trójkąt ABC jest równoramienny, więc $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ABC| = \alpha$, więc $4\alpha = 180^\circ$, skąd $\alpha = 45^\circ$ i $2\alpha = 90^\circ$. To oznacza, że wówczas trójkąt jest równoramienny i prostokątny, więc $b = c$ i $a = b\sqrt{2}$. Równość $a^2 - b^2 = bc$ jest więc wtedy również prawdziwa, gdyż

$$\left(b\sqrt{2}\right)^2 - b^2 = 2b^2 - b^2 = b^2 = bc .$$

To kończy dowód.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 p.

Zdający, przy przyjętych oznaczeniach, zapisze obie równości $\frac{b}{\sin\alpha} = \frac{a}{2\sin\alpha\cos\alpha}$,

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\alpha$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 p.

Zdający zapisze zależność, w której występują tylko wielkości a, b i c, ale nie wykaże tezy, np. zapisze $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \frac{a}{2b}$.

Rozwiązanie pełne .... 3 p.

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 7. (0–3)

Udowodnij, że dla dowolnego kąta $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ prawdziwa jest nierówność

$$\sin\left(\frac{\pi}{12} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} + \alpha\right) < \frac{1}{4}.$$

Rozwiązanie (I sposób)

Mnożąc obie strony nierówności przez 2, otrzymujemy nierówność równoważną

$$2\sin\left(\frac{\pi}{12} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12} + \alpha\right) < \frac{1}{2},$$

$$2\cos\frac{\frac{\pi}{6} + 2\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\frac{\pi}{6} - 2\alpha}{2} < \frac{1}{2}.$$

Tę nierówność możemy zapisać w sposób równoważny, korzystając ze wzoru na sinus różnicy kątów, w postaci

$$\sin\frac{\pi}{6} - \sin 2\alpha < \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2} - \sin 2\alpha < \frac{1}{2},$$

$$\sin 2\alpha > 0.$$

Ta nierówność jest prawdziwa dla każdego $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, gdyż wtedy $2\alpha \in (0, \pi)$.

Rozwiązanie (II sposób)

Korzystając ze wzoru na sinus różnicy kątów i ze wzoru na cosinus sumy kątów, otrzymujemy

$$\left(\sin\frac{\pi}{12}\cos\alpha - \cos\frac{\pi}{12}\sin\alpha\right)\left(\cos\frac{\pi}{12}\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{12}\sin\alpha\right) < \frac{1}{4},$$

$$\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}\cos^2\alpha - \sin^2\frac{\pi}{12}\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\frac{\pi}{12}\sin\alpha\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}\sin^2\alpha < \frac{1}{4},$$

$$\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) - \sin\alpha\cos\alpha\left(\sin^2\frac{\pi}{12} + \cos^2\frac{\pi}{12}\right) < \frac{1}{4},$$

$$\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} \cdot 1 - \sin\alpha\cos\alpha \cdot 1 < \frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} - \sin\alpha\cos\alpha < \frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{12}\right) - \sin\alpha\cos\alpha < \frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{6} - \sin\alpha\cos\alpha < \frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \sin\alpha\cos\alpha < \frac{1}{4},$$

$$\sin\alpha\cos\alpha > 0.$$

Ta nierówność jest prawdziwa dla każdego $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, gdyż wtedy $\sin\alpha > 0$ i $\cos\alpha > 0$.

Rozwiązanie (III sposób)

Jeżeli $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, to $-\frac{5\pi}{12} < \frac{\pi}{12} - \alpha < \frac{\pi}{12}$ oraz $\frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{12} + \alpha < \frac{7\pi}{12}$. Ponieważ w przedziale $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ funkcja sinus jest rosnąca, a w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$ funkcja cosinus jest malejąca, więc dla każdego $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ prawdziwe są nierówności

$$\sin\left(\frac{\pi}{12} - \alpha\right) < \sin\frac{\pi}{12} \text{ oraz } \cos\left(\frac{\pi}{12} + \alpha\right) < \cos\frac{\pi}{12}.$$

Zatem

$$\sin\left(\frac{\pi}{12} - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{12} + \alpha\right) < \sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \cdot 2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

To kończy dowód.

Schemat oceniania I, II i III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 p.

Zdający

- zapisze nierówność w postaci $2\cos\frac{\frac{\pi}{6} + 2\alpha}{2}\sin\frac{\frac{\pi}{6} - 2\alpha}{2} < \frac{1}{2}$

albo

- zapisze nierówność w postaci $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} \cdot 1 - \sin\alpha\cos\alpha \cdot 1 < \frac{1}{4}$

albo

- uzasadni, że $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ prawdziwa jest jedna z nierówności

  $\sin\left(\frac{\pi}{12} - \alpha\right) < \sin\frac{\pi}{12}$, $\cos\left(\frac{\pi}{12} + \alpha\right) < \cos\frac{\pi}{12}$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 p.

Zdający

- zapisze nierówność w postaci $\sin\frac{\pi}{6} - \sin 2\alpha < \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{6} - \sin\alpha\cos\alpha < \frac{1}{4}$

albo

- zapisze nierówność w postaci $\frac{1}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{6} - \sin\alpha\cos\alpha < \frac{1}{4}$

albo

- uzasadni, że $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ prawdziwe są obie nierówności

  $\sin\left(\frac{\pi}{12} - \alpha\right) < \sin\frac{\pi}{12}$, $\cos\left(\frac{\pi}{12} + \alpha\right) < \cos\frac{\pi}{12}$.

Rozwiązanie pełne .... 3 p.

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 8. (0–3)

Wykaż, że równanie $x^8 + x^2 = 2\left(x^4 + x - 1\right)$ ma tylko jedno rozwiązanie rzeczywiste $x = 1$.

Rozwiązanie

Równanie możemy zapisać w postaci równoważnej

$$x^8 + x^2 = 2x^4 + 2x - 2,$$

$$x^8 - 2x^4 + 1 + x^2 - 2x + 1 = 0,$$

$$\left(x^4 - 1\right)^2 + \left(x - 1\right)^2 = 0.$$

Lewa strona równania jest sumą dwóch liczb nieujemnych, więc jest ona równa 0 wtedy i tylko wtedy, gdy oba składniki są równe 0, czyli wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\left(x^4 - 1\right)^2 = 0 \text{ i } \left(x - 1\right)^2 = 0,$$

$$x^4 - 1 = 0 \text{ i } x - 1 = 0.$$

Drugie z otrzymanych równań ma tylko jedno rozwiązanie $x = 1$. Jest to również rozwiązanie pierwszego z równań. To kończy dowód.

Schemat oceniania

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 p.

Zdający zapisze równanie w postaci $\left(x^4 - 1\right)^2 + \left(x - 1\right)^2 = 0$.

Rozwiązanie pełne .... 3 p.

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 9. (0–4)

Ze zbioru wszystkich liczb naturalnych ośmiocyfrowych, w których zapisie dziesiętnym występują tylko cyfry ze zbioru $\{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$, losujemy jedną. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że suma cyfr wylosowanej liczby jest równa 3.

Rozwiązanie

Zauważmy, że elementami zbioru Ω wszystkich zdarzeń elementarnych są ośmiocyfrowe liczby, których cyfry wzięte są ze zbioru $\{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$. Wszystkich takich liczb tyle, ile ośmiowyrazowych ciągów $\left(x_1, x_2, ..., x_8\right)$, w których $x_1 \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ i $x_i \in \{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$ dla $2 \le i \le 8$. Zatem $\Omega = \left\{\left(x_1, x_2, ..., x_8\right) : x_1 \in \{1, 3, 5, 7, 9\} \text{ i } x_i \in \{0, 1, 3, 5, 7, 9\} \text{ dla } i \ge 2\right\}$ oraz

$$|\Omega| = 5 \cdot 6^7.$$

Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że suma cyfr wylosowanej liczby jest równa 3. Liczby, które spełniają ten warunek mają jedną z następujących postaci:

- pierwszą cyfrą jest 3 (licząc od lewej strony) i kolejne cyfry są zerami. Taka liczba jest tylko jedna.
- pierwszą cyfrą jest 1, na dwóch spośród pozostałych siedmiu miejscach są dwie cyfry 1, a na pozostałych pięciu miejscach są cyfry 0. Takich liczb jest $1 \cdot \binom{7}{2}$.

Zatem

$$|A| = 1 + \binom{7}{2} = 1 + 21 = 22.$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest więc równe:

$$P(A) = \frac{22}{5 \cdot 6^7} = \frac{11}{699840} \approx 0{,}00001571.$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający

- zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 5 \cdot 6^7$

albo

- zapisze dwa przypadki liczb, których suma cyfr jest równa 3.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający

- zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych zapisze dwa przypadki liczb, których suma cyfr jest równa 3

albo

- zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A: $|A| = 1 + \binom{7}{2}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający zapisze liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych oraz liczbę zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A: $|\Omega| = 5 \cdot 6^7$, $|A| = 1 + \binom{7}{2}$.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.

Zdający wyznaczy szukane prawdopodobieństwo, np.: $\frac{22}{5 \cdot 6^7}$.

Zadanie 10. (0–4)

Dany jest rosnący ciąg geometryczny (a, aq, aq^2), którego wszystkie wyrazy i iloraz są liczbami całkowitymi nieparzystymi. Jeśli największy wyraz ciągu zmniejszymy o 4, to otrzymamy ciąg arytmetyczny. Oblicz wyraz aq tego ciągu.

Rozwiązanie

Ciąg jest rosnący, zatem największym jego wyrazem jest liczba aq^2. Ciąg arytmetyczny tworzą więc liczby $(a, a \cdot q, a \cdot q^2 - 4)$.

Korzystając z własności ciągu arytmetycznego mamy, że $aq = \frac{a + (aq^2 - 4)}{2}$, czyli

$2aq = a + (aq^2 - 4)$.

Przekształcając otrzymaną równość otrzymujemy w szczególności:

$$-aq^2 + 2aq - a = -4,$$

$$-a\left(q^2-2q+1\right)=-4,$$
$$a(q-1)^2=4.$$

Wszystkie wyrazy mają być nieparzystymi liczbami całkowitymi. Zatem $a=1$ oraz $(q-1)^2=4$. Stąd $|q-1|=2$, zatem $q=3$ lub $q=-1$. Ostatnie wynik nie spełnia warunków zadania.
Zatem drugi wyraz jest równy: $aq=3$.

Schemat oceniania
Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 1 p.
Zdający zapisze dla odpowiednich wyrażeń równość wynikającą z własności ciągu arytmetycznego, np.: $aq=\dfrac{a+\left(aq^2-4\right)}{2}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 2 p.
Zdający zapisze równanie, w którym jedna ze stron jest iloczynem liczb całkowitych, a druga konkretną liczbą całkowitą, pozwalające wyznaczyć całkowite wartości niewiadomych, np.: $a(q-1)^2=4$.

Pokonanie prawie pełne .... 3 p.
Zdający wykorzysta rozkład liczby 4 na czynniki i wyznaczy co najmniej jedną z liczb: a lub q.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.
Zdający obliczy drugi wyraz ciągu: 3.

Zadanie 11. (0–4)

Dany jest nieskończony ciąg okręgów (o_n) o równaniach $x^2+y^2=2^{11-n}$, $n\geq 1$. Niech P_k będzie pierścieniem ograniczonym zewnętrznym okręgiem o_{2k-1} i wewnętrznym okręgiem o_{2k}. Oblicz sumę pól wszystkich pierścieni P_k, gdzie $k\geq 1$.

Rozwiązanie
Równanie przedstawia rodzinę współśrodkowych okręgów o środku w początku układu współrzędnych i promieniach $r=\left(\sqrt{2}\right)^{11-n}$. Promień pierwszego okręgu jest równy $r_1=2^5$, zaś drugiego – $r_2=2^{\frac{9}{2}}$. Pole pierwszego pierścienia jest równe $P_1=\pi\cdot 2^{10}-\pi\cdot 2^9=\pi\cdot 2^9$, pole następnego pierścienia jest równe $P_2=\pi\cdot 2^8-\pi\cdot 2^7=\pi\cdot 2^7$. Pole każdego z opisanych pierścieni można zapisać w postaci $P_k=\pi\cdot 2^{12-2k}-\pi\cdot 2^{11-2k}=\pi\cdot 2^{11-2k}$. Zauważamy, że pola pierścieni tworzą nieskończony ciąg geometryczny o ilorazie $q=\dfrac{\pi\cdot 2^{11-2(k+1)}}{\pi\cdot 2^{11-2k}}=2^{-2}=\dfrac{1}{4}$.
Ponieważ $|q|=\dfrac{1}{4}<1$, warunek istnienia sumy jest spełniony i można zastosować wzór na sumę wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego zbieżnego: $S=\dfrac{\pi\cdot 2^9}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{4}{3}\cdot\pi\cdot 2^9=\dfrac{2^{11}\pi}{3}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 p.

Zdający obliczy pole pierwszego pierścienia ograniczonego okręgiem pierwszym i drugim $P_1 = 2^9 \cdot \pi$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający zauważy, że pola pierścieni tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $q = \frac{1}{4}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający zastosuje wzór na sumę szeregu geometrycznego $S = \frac{2^9 \cdot \pi}{1 - \frac{1}{4}}$.

Rozwiązanie pełne .... 4 p.

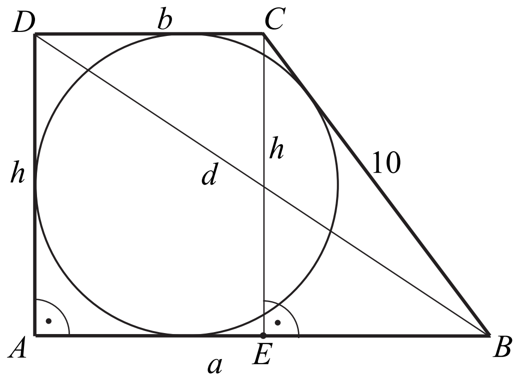
Zdający obliczy sumę pól wszystkich pierścieni $S = \frac{2^{11} \cdot \pi}{3}$ oraz w trakcie rozwiązywania zadania zapisze, że taka suma istnieje, bo iloraz ciągu spełnia warunek $|q| < 1$.

Zadanie 12. (0–5)

Trapez prostokątny *ABCD* o podstawach *AB* i *CD* jest opisany na okręgu. Ramię *BC* ma długość 10, a ramię *AD* jest wysokością trapezu. Podstawa *AB* jest 2 razy dłuższa od podstawy *CD*. Oblicz pole tego trapezu.

Rozwiązanie

Poprowadźmy wysokość *CE* trapezu i przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Podstawa *AB* jest dwa razy dłuższa od podstawy *CD*, więc

$$a = 2b.$$

Zatem

$$|EB| = |AB| - |CD| = 2b - b = b.$$

Ponieważ trapez jest opisany na okręgu, więc

$$|AB| + |CD| = |AD| + |BC|,$$

czyli

$$2b+b=h+10,$$

(1) $$h=3b-10.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta BCE otrzymujemy

$$|EB|^2+|CE|^2=|BC|^2,$$

$$b^2+h^2=10^2.$$

Stąd i z (1) otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą b

$$b^2+(3b-10)^2=100,$$

$$b^2+9b^2-60b+100=100,$$

$$10b^2-60b=0,$$

$$10b(b-6)=0,$$

$$b=0 \text{ lub } b=6.$$

Tylko drugie z tych rozwiązań jest dodatnie, więc $b=6$.
Zatem $a=2\cdot 6=12$ i $h=3\cdot 6-10=8$.
Pole trapezu jest równe

$$P_{ABCD}=\frac{a+b}{2}\cdot h=\frac{18}{2}\cdot 8=72.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta ABD otrzymujemy

$$|AD|^2+|AB|^2=|BD|^2,$$

$$12^2+8^2=d^2.$$

Stąd

$$d=\sqrt{144+64}=\sqrt{208}=4\sqrt{13}.$$

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.

Zdający zapisze zależność między długościami boków trapezu
- wynikającą z własności czworokąta opisanego na okręgu: $a+b=h+10$

albo
- wynikającą z twierdzenia Pitagorasa: $(a-b)^2+h^2=10^2$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający zapisze układ równań (tyle równań niezależnych ile niewiadomych), pozwalający obliczyć długości boków trapezu, np.: $a+b=h+10$ i $(a-b)^2+h^2=10^2$ i $a=2b$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą, np.: $b^2+(3b-10)^2=100$.

Rozwiązanie prawie pełne .... 4 p.

Zdający
- obliczy długość jednego z boków trapezu i na tym zakończy

albo
- obliczy pole trapezu, popełniając w trakcie rozwiązania zadania błędy rachunkowe.

Rozwiązanie pełne .... 5 p.

Zdający obliczy pole trapezu $ABCD$: $P_{ABCD}=72$.

Uwaga
Jeżeli zdający obliczy długości boków trapezu i na tym zakończy, to otrzymuje **4 punkty**.

Zadanie 13. (0–5)
Wierzchołki A i B trójkąta prostokątnego ABC leżą na osi Oy układu współrzędnych. Okrąg wpisany w ten trójkąt jest styczny do boków AB, BC i CA w punktach – odpowiednio – $P=(0,10)$, $Q=(8,6)$ i $R=(9,13)$. Oblicz współrzędne wierzchołków A, B i C tego trójkąta.

Rozwiązanie (I sposób)
Współczynnik kierunkowy prostej PR jest równy

$$a_{PR}=\frac{13-10}{9-0}=\frac{1}{3},$$

a środek E cięciwy PR ma współrzędne

$$E=\left(\tfrac{9}{2},\tfrac{23}{2}\right).$$

Symetralna cięciwy PR , a więc prosta prostopadła do prostej PR i przechodząca przez punkt E ma równanie postaci

$$y=-3\left(x-\tfrac{9}{2}\right)+\tfrac{23}{2},$$

$$y=-3x+25.$$

Przecina ona oś Oy w punkcie B. Zatem $B=(0,25)$.

Tak samo wyznaczymy współrzędne wierzchołka A.
Współczynnik kierunkowy prostej PR jest równy

$$a_{PQ}=\frac{6-10}{8-0}=-\frac{1}{2},$$

a środek D cięciwy PQ ma współrzędne

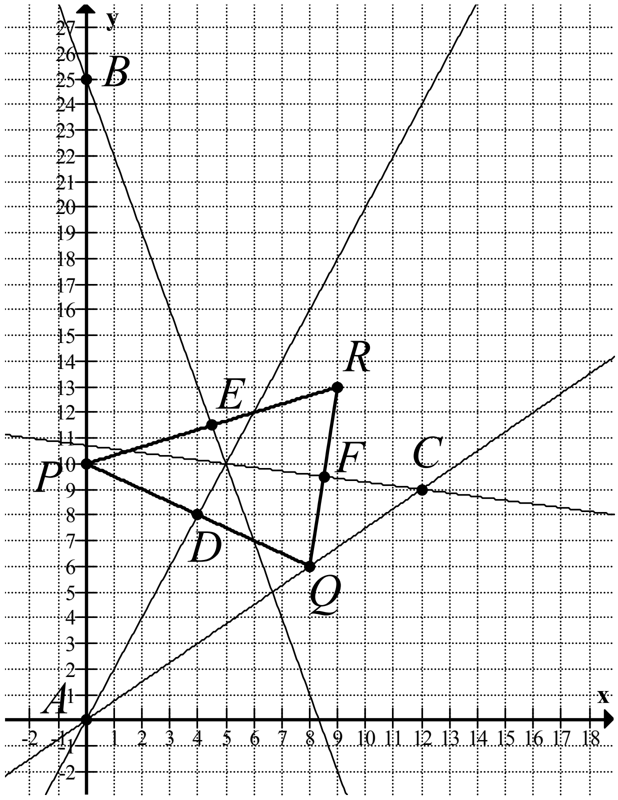
$$D=(4,8).$$

Prosta przechodząca przez punkt D i prostopadła do prostej PQ, czyli symetralna cięciwy PQ ma równanie postaci

$$y=2(x-4)+8,$$

$$y=2x.$$

Przecina ona oś Oy w punkcie A. Zatem $A=(0,0)$.



Pozostaje obliczyć współrzędne wierzchołka C. Możemy je obliczyć na kilka sposobów.
Sposób I.
Wystarczy wyznaczyć równania prostych AQ i BR zawierających boki odpowiednio AC i BC. Punkt ich przecięcia to wierzchołek C.
Równanie prostej AQ ma postać

$$y = \frac{6-0}{8-0}(x-0)+0,$$

$$y = \frac{3}{4}x.$$

Równanie prostej BR z kolei ma postać,

$$y = \frac{13-25}{9-0}(x-0)+25,$$

$$y = -\frac{4}{3}x+25.$$

Zatem

$$-\frac{4}{3}x+25 = \frac{3}{4}x,$$

$$25 = \frac{25}{12}x,$$

$$x = 12,$$

więc $y = \frac{3}{4}\cdot 12 = 9$, czyli $C = (12,9)$.
Sposób II.
Wystarczy wyznaczyć równanie jednej z prostych AQ lub BR oraz równanie symetralnej cięciwy QR. Punkt ich przecięcia to wierzchołek C.
Równanie prostej AQ ma postać $y = \frac{3}{4}x$.
Współczynnik kierunkowy prostej QR jest równy

$$a_{QR} = \frac{13-6}{9-8} = 7,$$

a środek F cięciwy QR ma współrzędne

$$F = \left(\frac{17}{2}, \frac{19}{2}\right).$$

Prosta przechodząca przez punkt F i prostopadła do prostej PQ ma równanie postaci

$$y=-\tfrac{1}{7}\left(x-\tfrac{17}{2}\right)+\tfrac{19}{2},$$

$$y=-\tfrac{1}{7}x+\tfrac{75}{7}.$$

Zatem

$$-\tfrac{1}{7}x+\tfrac{75}{7}=\tfrac{3}{4}x,$$

$$\tfrac{75}{7}=\tfrac{25}{28}x,$$

$$x=12,$$

więc $y=\frac{3}{4}\cdot 12=9$, czyli $C=(12,9)$.

Rozwiązanie (II sposób)

Wyznaczmy równanie okręgu przechodzącego przez punkty P, Q i R. Jest to okrąg opisany na trójkącie PQR i jednocześnie wpisany w trójkąt ABC. Możemy wyznaczyć to równanie na kilka sposobów.

Sposób I .

Okrąg ten na równanie postaci $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Współrzędne punktów P, Q i R spełniają równanie tego okręgu, więc otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases}(0-a)^2+(10-b)^2=r^2\\(8-a)^2+(6-b)^2=r^2\\(9-a)^2+(13-b)^2=r^2\end{cases},\ \text{czyli}\ \begin{cases}a^2+b^2-20b+100=r^2\\a^2+b^2-16a-12b+100=r^2\\a^2+b^2-18a-26b+250=r^2\end{cases}$$

Odejmując stronami od pierwszego równania drugie i od drugiego trzecie, otrzymujemy

$$\begin{cases}16a-8b=0\\2a+14b-150=0\end{cases}.$$

Z pierwszego równania otrzymujemy $b=2a$, więc

$$a+7\cdot 2a-75=0,$$

$$15a=75,$$

$$a=5,$$

zatem $b=2a=10$, więc środkiem tego okręgu jest punkt $S=(5,10)$.

Bok AC trójkąta ABC jest zawarty w prostej przechodzącej przez punkt Q i prostopadłej do promienia SQ, a więc w stycznej do okręgu przechodzącej przez punkt Q. Współczynnik kierunkowy prostej SQ jest równy

$$a_{SQ}=\frac{6-10}{8-5}=-\frac{4}{3},$$

więc prosta AC – prostopadła do SQ i przechodząca przez Q ma równanie postaci

$$y=\tfrac{3}{4}(x-8)+6,$$

$$y=\tfrac{3}{4}x.$$

Przecina ona oś Oy w punkcie $A=(0,0)$.

Bok BC trójkąta ABC jest zawarty w prostej przechodzącej przez punkt R i prostopadłej do promienia SR, a więc w stycznej do okręgu przechodzącej przez punkt R. Współczynnik kierunkowy prostej SR jest równy

$$a_{SR}=\frac{13-10}{9-5}=\frac{3}{4},$$

więc prosta BC – prostopadła do SR i przechodząca przez R ma równanie postaci

$$y = -\frac{4}{3}(x-9)+13,$$

$$y = -\frac{4}{3}x+25.$$

Przecina ona oś *Oy* w punkcie $B=(0,25)$.

Punkt *C* leży na prostej *AC* i na prostej *BC*, więc jego współrzędne obliczymy, rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x \\ y = -\frac{4}{3}x+25 \end{cases}.$$

Stąd

$$-\frac{4}{3}x+25 = \frac{3}{4}x,$$

$$25 = \frac{25}{12}x,$$

$$x = 12,$$

więc $y = \frac{3}{4}\cdot 12 = 9$, czyli $C=(12,9)$.

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 p.

Zdający
- obliczy (zapisze) współczynnik kierunkowy jednej z cięciw *PQ*, *PR*, *QR*:
  $a_{PQ} = -\frac{1}{2}$, $a_{PR} = \frac{1}{3}$, $a_{QR} = 7$

albo
- zapisze (zaznaczy na rysunku), że odpowiednie wierzchołki leżą w równej odległości od punktów *P*, *Q*, *R*.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 p.

Zdający zapisze równanie symetralnej co najmniej jednej spośród cięciw, np.: $y = 2x$, $y = -3x+25$, $y = -\frac{1}{7}\left(x-\frac{17}{2}\right)+\frac{19}{2}$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 p.

Zdający
- wyznaczy współrzędne wierzchołków leżących na osi *Oy*: $A=(0,25)$, $B=(0,0)$.

albo
- obliczy współrzędne środka okręgu wpisanego w trójkąt *ABC* lub wyznaczy równanie tego okręgu: $S=(5,10)$, $(x-5)^2+(y-10)^2=25$.

Rozwiązanie prawie pełne .... 4 p.

Zdający zapisze układ równań prowadzące do wyznaczenia współrzędnych wierzchołka *C*, np.: $y=\frac{3}{4}x$ i $y=-\frac{4}{3}x+25$.

Rozwiązanie pełne .... 5 p.

Zdający wyznaczy współrzędne wszystkich wierzchołków trójkąta *ABC*: $A=(0,0)$, $B=(0,25)$, $C=(12,9)$.

Zadanie 14. (0–6)

Wyznacz wszystkie wartości parametru *m*, dla których równanie

$$x^2 - 3mx + (m+1)(2m-1) = 0$$

ma dwa różne rozwiązania x_1, x_2 spełniające warunki: $x_1 \cdot x_2 \neq 0$ oraz $0 < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \leq \frac{2}{3}$.

Rozwiązanie I sposób

Wyróżnik trójmianu kwadratowego $x^2 - 3mx + (m+1)(2m-1)$ jest równy

$$\Delta = 9m^2 - 4 \cdot (m+1)(2m-1) = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2 .$$

Dla każdej liczby rzeczywistej $m \neq 2$ wyróżnik jest dodatni, więc równanie ma dwa różne rozwiązania $x_1 = m+1$ oraz $x_2 = 2m-1$.

Przy założeniu $m \neq -1$ oraz $m \neq \frac{1}{2}$ otrzymujemy dwie nierówności

$$\frac{1}{m+1} + \frac{1}{2m-1} > 0 \text{ oraz } \frac{1}{m+1} + \frac{1}{2m-1} \leq \frac{2}{3} .$$

Przekształcamy w sposób równoważny pierwszą z nich

$$\frac{2m-1+m+1}{(m+1)(2m-1)} > 0 ,$$

$$3m(m+1)(2m-1) > 0 .$$

$m \in (-1,0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

Przekształcamy w sposób równoważny drugą nierówność

$$\frac{1}{m+1} + \frac{1}{2m-1} \leq \frac{2}{3}$$

$$\frac{3m}{(m+1)(2m-1)} \leq \frac{2}{3}$$

$$\frac{9m - 2(m+1)(2m-1)}{3(m+1)(2m-1)} \leq 0$$

$$\frac{-4m^2 + 7m + 2}{3(m+1)(2m-1)} \leq 0$$

$$\frac{-4(m-2)\left(m+\frac{1}{4}\right)}{3(m+1)(2m-1)} \leq 0$$

$$-12(m-2)\left(m+\frac{1}{4}\right)(m+1)(2m-1) \leq 0$$

$m \in (-\infty, -1) \cup \left\langle -\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right) \cup \langle 2, +\infty)$.

Ostatecznie otrzymujemy $m \in \left\langle -\frac{1}{4}, 0 \right) \cup (2, +\infty)$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania

Rozwiązanie zadania składa się z dwóch etapów.

Pierwszy z nich polega na obliczeniu wyróżnika trójmianu kwadratowego i stwierdzeniu, że dla każdej wartości parametru $m \neq 2$ istnieją dwa różne rozwiązania rzeczywiste.

$\Delta = 9m^2 - 4\cdot(m+1)(2m-1) = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2$

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.
Drugi etap polega na wyznaczeniu rozwiązań równania w zależności od parametru *m*, zapisaniu nierówności $\frac{1}{m+1}+\frac{1}{2m-1}>0$ oraz $\frac{1}{m+1}+\frac{1}{2m-1}\le\frac{2}{3}$, rozwiązaniu tych nierówności, a następnie ustaleniu części wspólnej wszystkich rozwiązań. .

Za ten etap rozwiązania zdający otrzymuje **5 punktów**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

Za wyznaczenie pierwiastków w zależności od parametru *m*:
$x_1 = m+1$ oraz $x_2 = 2m-1$.

zdający otrzymuje **1 punkty**.

Za zapisanie nierówności $\frac{1}{m+1}+\frac{1}{2m-1}>0$ i jej rozwiązanie $m\in(-1,0)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$
zdający otrzymuje **1 punkt.**

Za zapisanie nierówności $\frac{1}{m+1}+\frac{1}{2m-1}\le\frac{2}{3}$ w postaci $\frac{-4(m-2)\left(m+\frac{1}{4}\right)}{3(m+1)(2m-1)}\le 0$

zdający otrzymuje **1 punkt,** za jej rozwiązanie $m\in(-\infty,-1)\cup\left\langle -\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)\cup\left\langle 2,+\infty\right)$ zdający otrzymuje **1 punkty.**

Za zapisanie części wspólnej rozwiązań $m\in\left\langle -\frac{1}{4},0\right)\cup\left(2,+\infty\right)$ zdający otrzymuje **1 punkt**.

Rozwiązanie II sposób

Obliczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego:

$$\Delta = 9m^2 - 4\cdot(m+1)(2m-1) = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2.$$

Dla każdej liczby rzeczywistej $m\neq 2$ wyróżnik jest dodatni, więc równanie ma dwa różne rozwiązania.

Nierówność $0<\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\le\frac{2}{3}$ przekształcamy w sposób równoważny

$$0<\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}\le\frac{2}{3}.$$

Ze wzorów Viète'a otrzymujemy

$$0<\frac{3m}{(m+1)(2m-1)}\le\frac{2}{3}.$$

Nierówność $0<\frac{3m}{(m+1)(2m-1)}$ możemy zapisać w postaci

$$3m(m+1)(2m-1)>0 \text{ stąd } m\in(-1,0)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right).$$

Natomiast nierówność $\frac{3m}{(m+1)(2m-1)}\le\frac{2}{3}$ przekształcamy równoważnie

$$\frac{3m}{(m+1)(2m-1)}\le\frac{2}{3},$$

$$\frac{9m-2(m+1)(2m-1)}{3(m+1)(2m-1)}\le 0,$$

$$\frac{-4m^2+7m+2}{3(m+1)(2m-1)}\le 0,$$

$$\frac{-4(m-2)\left(m+\frac{1}{4}\right)}{3(m+1)(2m-1)}\le 0,$$

$$-12(m-2)\left(m+\frac{1}{4}\right)(m+1)(2m-1)\le 0.$$

Więc $m\in(-\infty,-1)\cup\left\langle -\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)\cup\langle 2,+\infty)$.

Ostatecznie otrzymujemy $m\in\left\langle -\frac{1}{4},0\right)\cup(2,+\infty)$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania

Rozwiązanie zadania składa się z dwóch etapów.

Pierwszy z nich polega na obliczeniu wyróżnika trójmianu kwadratowego i stwierdzeniu, że dla każdej wartości parametru $m\ne 2$ istnieją dwa różne rozwiązania rzeczywiste.

$\Delta=9m^2-4\cdot(m+1)(2m-1)=m^2-4m+4=(m-2)^2$

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

Drugi etap polega na zapisaniu nierówności w postaci równoważnej $0<\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}\le\frac{2}{3}$, wykorzystaniu wzorów Viète'a , zapisaniu nierówności $0<\frac{3m}{(m+1)(2m-1)}\le\frac{2}{3}$, rozwiązaniu tych nierówności, a następnie ustaleniu ostatecznej odpowiedzi.

Za ten etap rozwiązania zdający otrzymuje **5 punktów**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

Za wykorzystanie wzorów Viète'a i zapisanie nierówności $0<\frac{3m}{(m+1)(2m-1)}\le\frac{2}{3}$ zdający otrzymuje **1 punkt.**

Za rozwiązanie nierówności $\frac{3m}{(m+1)(2m-1)}>0$

$m\in(-1,0)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ zdający otrzymuje **1 punkt.**

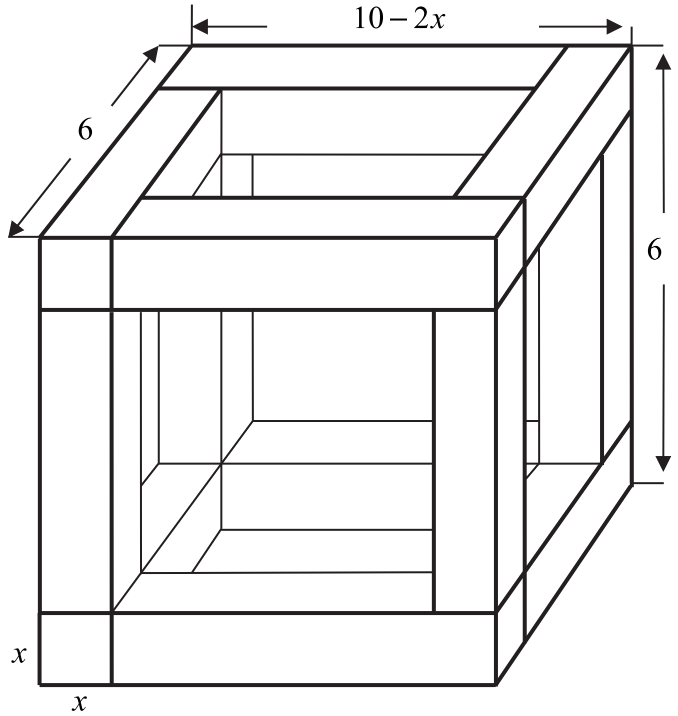
Za zapisanie nierówności $\frac{3m}{(m+1)(2m-1)}\le\frac{2}{3}$ w postaci $\frac{-4(m-2)\left(m+\frac{1}{4}\right)}{3(m+1)(2m-1)}\le 0$

zdający otrzymuje **1 punkt**, za jej rozwiązanie $m\in(-\infty,-1)\cup\left\langle -\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)\cup\langle 2,+\infty)$ zdający otrzymuje **1 punkt.**

Za zapisanie ostatecznej odpowiedzi $m\in\left\langle -\frac{1}{4},0\right)\cup(2,+\infty)$ zdający otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 15. (0–7)

Rozpatrujemy wszystkie możliwe drewniane szkielety o kształcie przedstawionym na rysunku, wykonane z listewek. Każda z tych listewek ma kształt prostopadłościanu o podstawie kwadratu o boku długości x. Wymiary szkieletu zaznaczono na rysunku.



a) Wyznacz objętość V drewna potrzebnego do budowy szkieletu jako funkcję zmiennej x.
b) Wyznacz dziedzinę funkcji V.
c) Oblicz tę wartość x, dla której zbudowany szkielet jest możliwie najcięższy, czyli kiedy funkcja V osiąga wartość największą. Oblicz tę największą objętość.

Rozwiązanie

Rozpatrywana bryła zbudowana jest z dwunastu belek. Każda z nich jest prostopadłościanem, którego podstawą jest kwadrat o boku długości x.
Cztery „pionowe belki" mają długość $6-2x$, cztery poziome (równoległe do płaszczyzny rysunku) mają długość $10-3x$, natomiast cztery poziome (prostopadłe do płaszczyzny rysunku) mają długość $6-x$. Zatem objętość V rozpatrywanej bryły jest równa sumie objętości wszystkich 12 belek, więc

$$V = 4x^2\left(6-2x\right)+4x^2\left(10-3x\right)+4x^2\left(6-x\right)=4x^2\left(6-2x+10-3x+6-x\right)=$$
$$=4x^2\left(22-6x\right)=8\left(11x^2-3x^3\right).$$

Otrzymaliśmy zatem funkcję V zmiennej x określoną wzorem

$$V\left(x\right)=8\left(11x^2-3x^3\right).$$

Wyznaczmy dziedzinę funkcji V. Z warunków geometrycznych zadania wynika, że $x>0$ oraz $6\ge 2x$ i $10-2x\ge 2x$. Stąd otrzymujemy $0<x\le\frac{5}{2}$, czyli $D_V=\left(0,\frac{5}{2}\right\rangle$.

Uwaga

Możemy też przyjąć, że $D_V=\left(0,\frac{5}{2}\right)$.

Pochodna funkcji V jest równa

$$V'\left(x\right)=8\cdot\left(22x-9x^2\right)=8x\left(22-9x\right) \text{ dla } 0<x\le\frac{5}{2}.$$

Obliczmy miejsca zerowe i zbadajmy znak pochodnej.

$V'(x)=0 \Leftrightarrow \left(x=0 \vee x=\frac{22}{9}\right) \wedge 0<x\le\frac{5}{2} \Leftrightarrow x=\frac{22}{9}$,

$V'(x)>0 \Leftrightarrow \left(x>0 \wedge x<\frac{22}{9}\right) \wedge 0<x\le\frac{5}{2} \Leftrightarrow 0<x<\frac{22}{9}$,

$V'(x)<0 \Leftrightarrow \left(x<0 \vee x>\frac{22}{9}\right) \wedge 0<x\le\frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{22}{9}<x\le\frac{5}{2}$.

Zatem w przedziale $\left(0,\frac{22}{9}\right\rangle$ funkcja V jest rosnąca, w przedziale $\left\langle\frac{22}{9},\frac{5}{2}\right\rangle$ jest malejąca, a w punkcie $x=\frac{22}{9}$ osiąga maksimum lokalne, które jest jednocześnie największą wartością tej funkcji, gdyż jest to jedyne maksimum lokalne funkcji, a funkcja jest różniczkowalna.

Dla $x=\frac{22}{9}$ funkcja V przyjmuje wartość

$$V\left(\frac{22}{9}\right)=8\left(11\cdot\left(\frac{22}{9}\right)^2-3\cdot\left(\frac{22}{9}\right)^3\right)=88\cdot\left(\frac{22}{9}\right)^2\left(1-3\cdot\frac{2}{9}\right)=88\cdot\frac{484}{81}\cdot\frac{1}{3}=\frac{42592}{243}=175\frac{67}{243}.$$

Schemat oceniania
Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

I. Pierwszy etap, który oceniamy na **3 punkty**, składa się z trzech części:

I.1) zapisania długości każdej z belek użytych do konstrukcji, w zależności od x: $6-2x$, $6-x$, $10-3x$.

I.2) zapisania objętości V, jako funkcji zmiennej x: $V(x)=8\cdot\left(11x^2-3x^3\right)$

I.3) wyznaczenia dziedziny funkcji V: $D_V=\left(0,\frac{5}{2}\right\rangle$

Uwaga.
Akceptujemy zapis $D_V=\left(0,\frac{5}{2}\right)$.

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

Uwagi

1. Jeśli zdający popełni błąd przy wyznaczaniu dziedziny (akceptujemy zapis $D_V=\left(0,\frac{5}{2}\right)$) albo pominie wyznaczenie dziedziny, ale funkcja objętości zostanie zapisana prawidłowo, to otrzymuje za tę cześć **2 punkty** i może otrzymać punkty, które odpowiadają kolejnym etapom rozwiązania zadania.
2. Jeśli zdający poprawnie zapisze długości dwóch „rodzajów” belek, popełni błąd przy kolejnej i konsekwentnie wyznacza funkcję objętości, to za pierwszy etap może otrzymać co najwyżej 1 punkt (za dziedzinę), ale może otrzymać punkty, które odpowiadają kolejnym etapom rozwiązania zadania.

II. Drugi etap, za który zdający może otrzymać **3 punkty**, składa się z trzech części:

II.1) wyznaczenie pochodnej funkcji wielomianowej $f(x)=8\cdot\left(11x^2-3x^3\right)$: $f'(x)=8x(22-9x)$;

II.2) obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji f: $x=0$, $x=\frac{22}{9}$;

II.3) uzasadnienie (np. badanie monotoniczności funkcji), że funkcja V posiada wartość największą dla $x=\frac{22}{9}$: pochodna funkcji jest dodatnia wówczas gdy $x\in\left(0,\frac{22}{9}\right)$, pochodna jest ujemna dla $x\in\left(\frac{22}{9},\frac{5}{2}\right\rangle$.

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**, o ile poprzednia część etapu została zrealizowana bezbłędnie.

III. Trzeci etap to obliczenie największej objętości bryły: $V\left(\frac{22}{9}\right)=\frac{42592}{243}=175\frac{67}{243}$.

Za ten etap zdający może otrzymać **1 punkt**, o ile rozwiązał poprawnie poprzedni etap zadania.